

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 105.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 74.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 162.

A4.

i) Λάθος

ii) Σωστό

iii) Σωστό

iv) Σωστό

v) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

Έχουμε

$$f'(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0, \quad x > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Εύρεση της αντίστροφης της f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4, \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Επομένως

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (-\infty, 4).$$

Για $x > 0$ και $y < 4$ έχουμε

$$y = f(x) \iff y = 4 - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} = 4 - y \iff x = \frac{1}{4 - y}.$$

Άρα

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{4 - x}}, \quad x < 4.$$

B2.

Έχουμε:

i)

$$D_g = D_f \cap D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (0, 4).$$

Επίσης

$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \quad x \in (0, 4).$$

ii) Για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 + \frac{1}{4-x} \right) = \frac{17}{4}.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty,$$

οπότε η C_g έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία

$$\boxed{x = 0}.$$

Για $x \rightarrow 4^-$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4-x} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = \frac{15}{4}.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = +\infty,$$

οπότε η C_g έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία

$$\boxed{x = 4}.$$

Δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

B3.

$$g'(x) = \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} \right)' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4-x)^2} > 0,$$

για κάθε $0 < x < 4$. Άρα $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$, επομένως δεν υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\begin{aligned} D_h &= D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, +\infty). \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\ &= f(\ln x) \\ &= e^{\ln x} + \ln x - 1 \\ &= x + \ln x - 1. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{h(x) = x + \ln x - 1}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Γ2.

i)

$$h'(x) = (x + \ln x - 1)' = 1 + \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0.$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x - 1) = -\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Ακόμη,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x - 1) = +\infty.$$

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι

$$\boxed{h(A) = \mathbb{R}}.$$

ii) Εφόσον $2026 \in h(A)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα στο

$$A = (0, +\infty),$$

υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 2026.$$

Γ3.

i) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

ii)

$$\begin{aligned} h^{-1}(x) = 1 &\implies h(h^{-1}(x)) = h(1) \\ &\iff x = 1 + \ln 1 - 1 \\ &\iff \boxed{x = 0}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$.
Άρα, από το θεώρημα *Fermat*:

$$f'(1) = 0 \iff a + b = 0. \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Άρα

$$f'\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \tan \frac{\pi}{4} \iff \frac{2a}{3} + b = 1. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), με αφαίρεση κατά μέλη,

$$\frac{a}{3} = -1 \iff \boxed{a = -3}.$$

Από την (1), για $a = -3$, προκύπτει

$$\boxed{b = 3}.$$

- ii) Για $a = -3$ και $b = 3$,

$$f'(x) = -3x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή

$$(-x^3 + 3x)' = -3x^2 + 3,$$

έχουμε

$$f(x) = -x^3 + 3x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το 0. Άρα

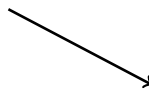
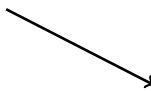
$$f(1) = 0 \iff -1 + 3 + c = 0 \iff c = -2.$$

Επομένως

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x - 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2.

Έχουμε $f'(x) = -3x^2 + 3$, $f''(x) = -6x$, $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ με τιμή

$$f(-1) = -4,$$

και τοπικό μέγιστο για $x = 1$ με τιμή

$$f(1) = 0.$$

Για την κυρτότητα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$. Επειδή $f(0) = -2$, η C_f έχει σημείο καμπής το:

$$M(0, -2).$$

Για τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff -x^3 + 3x - 2 = 0 \\
 &\iff -(x-1)^2(x+2) = 0 \\
 &\iff x = 1 \text{ ή } x = -2.
 \end{aligned}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$$A(1, 0), \quad B(-2, 0).$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 2) = +\infty,$$

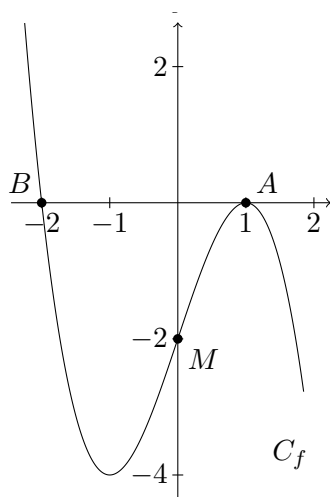
ενώ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x - 2) = -\infty.$$

Άρα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, άρα δεν έχει ασύμπτωτες.

Γραφική παράσταση



Δ3. Έχουμε $f(x) < 0$ για τιμές του x κοντά στο 1, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{|f(x)| \cdot (x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\ln(1 + f(x))}{-f(x)} \cdot \frac{1}{(x - 1)^2} \right].$$

Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{-f(x)} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{-u} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{\text{DL'H}}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{-1} = -1 < 0.$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{|f(x)| \cdot (x - 1)^2} = -\infty.$$