ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα Α

Α1 Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ.105.

Α2 Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ 31.

Α3 Διατύπωση σχολικό βιβλίο σελ 77.

Α4

(α) Σωστό

(β) Λάθος

(γ) Σωστό

(δ) Σωστό

(ε) Σωστό

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\ln x-1$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2$

Β1

$$\begin{cases} x\in A_g \\ \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x-2>0 \iff x>2 \end{cases}$$

Άρα $A_h=(2,+\infty)$, $h(x)=f(g(x))=2\ln(x-2)-1$.

Β2

$h(x)>1 \iff 2\ln(x-2)>2 \iff \ln x-2>1 \iff x-2>e \iff x>e+2$

Β3

Έστω $x_1,x_2>2$ με:

$$\begin{gathered} h(x_1)=h(x_2)\Longrightarrow \\ 2\ln(x_1-2)-1=2\ln(x_2-2)-1\Longrightarrow \\ 2\ln(x_1-2)=2\ln(x_2-2)\Longrightarrow \\ \ln(x_1-2)=\ln(x_2-2)\overset{\ln\uparrow}{\Longrightarrow} \\ x_1-2=x_2-2\Longrightarrow \\ x_1=x_2 \end{gathered}$$

Άρα $h:1-1$ άρα αντιστρέφεται.

Εύρεση h^{-1}:

$$\begin{aligned}
h(x) = y &\iff \\
2\ln(x-2) - 1 = y &\iff \\
2\ln(x-2) = y + 1 &\iff \\
\ln(x-2) = \frac{y+1}{2} &\iff \\
x - 2 = e^{(y+1)/2} &\iff \\
x = e^{(y+1)/2} + 2 &
\end{aligned}$$

Όμως $x > 2 \iff \quad e^{(y+1)/2} + 2 > 2 \iff \quad e^{(y+1)/2} > 0$ ισχύει, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$h^{-1}(x) = e^{(y+1)/2} + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Β4

Έχουμε $\phi(x) = [h^{-1}(x) - 3] \cdot [x^3 - 8] = [e^{(x+1)/2} - 3] \cdot [x^3 - 8]$

Έστω $\phi(x) = (e^{(x+1)/2)(q^3-8)}$ στο $[-1, 2]$

- Συνεχής στο [-1,2] ως πράξεις συνεχών.
- Παραγωγίσιμη στο (-1,2).
-

$$\begin{aligned}
\phi(-1) = (e^{(-1+1)/2} - 1)((-1)^3 - 8) = (e^0 - 1)(-1 - 8) = 0 \\
\phi(2) = (e^{(2+1)/2} - 1)((2)^3 - 8) = (e^{\frac{3}{2}} - 1)(8 - 8) = 0
\end{aligned}$$

Άρα $\phi(-1) = \phi(2)$ Άρα ισχύει το **Θ.Rolle**.

Θέμα Γ

$f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Γ1

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, παραγωγίσιμη στο (0,3) με:

$$f'(x) = \frac{(x)' e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

x	0		1		$+3$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\left.\begin{array}{r} \text{T.E: } f(0) = 0 \\ \text{T.E: } f(3) = \dfrac{3}{e^3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{O.E} = 0$$

$$\text{T.M.} = f(1) = \quad \frac{1}{e} \Longrightarrow \text{O.M.}$$

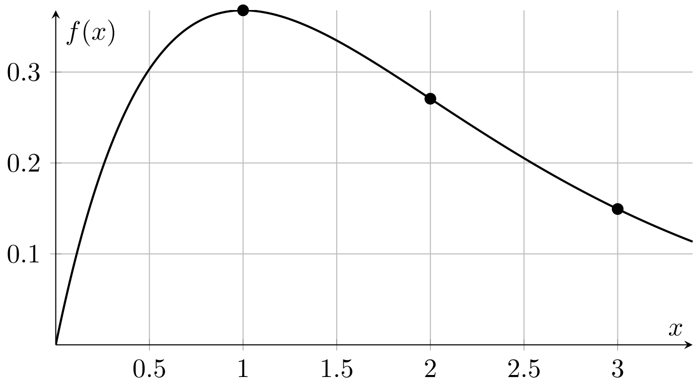
Γ2

$$f''(x) = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{(1-x)' e^x - (1-x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1-(1-x)}{(e^x)} = \frac{x-2}{e^x}$$

x	0		2		3
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ:Κ$(2, f(2))$=$K(2, \dfrac{2}{e^2})$

Γ3



Γ4

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 x(-e^{-x})dx = \int_0^1 (-e^{-x})' x\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}x\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})(x)' dx = -e^{-1} + e^0 \cdot 0 + \int_0^1 (-e^{-x})dx$$
$$= -\frac{1}{e} - e^{-1}e^0 = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}\tau.\mu.$$

Θέμα Δ

Δ1

Η f είναι συνεχής στο -1 άρα:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to -1}(e^{x+1}+\lambda x) = \lim_{x\to -1}\frac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha} \Longleftrightarrow$$
$$e^{-1+1}+\lambda(-1) = \frac{\alpha(-1)+\alpha}{-1+\alpha} \Longleftrightarrow 1-\lambda = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1}+x & x<1 \\ \dfrac{ax+a}{x+a} & x\geq 1 \end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο -1 άρα:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

με $f(-1)=0, f(-1) = \dfrac{a(-1)+a}{-1+a}$.

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x+1}+x}{x+1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{ax+a}{a}-0}{x+1}$$

Όμως:

$$l_1 = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x+1}+x}{x+1} \underset{D'HL}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x+1}+1}{1} = 1$$

$$l_2 = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+a}{(x+1)(x+a)} \underset{D'HL}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{a}{2x+a-1} = \frac{a}{a-1}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} l_1 = l_2 &\Longleftrightarrow \\ 2 = \frac{a}{a-1} &\Longleftrightarrow \\ 2a-2 = a &\Longleftrightarrow \\ a = 2 & \end{aligned}$$

Οπότε

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1}+x & x<1 \\ & \mu\varepsilon \quad f'(-1)=2 \\ \dfrac{2x+2}{x+2} & x\geq 1 \end{cases}$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$\begin{aligned} (\varepsilon):\quad & y - f'(-1) = f'(-1)(x+1), \quad f(-1)=0, f'(-1)=2 \\ & y-0 = 2(x+1) \Longleftrightarrow \\ & y = 2x+2 \end{aligned}$$

Δ2

- Στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $\varepsilon_1 : y = 2$

- Στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}+x}{x} \underset{D'HL}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}+1}{1} = 0+1 = 1 = \lambda =$$
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} [e^{x+1} + x - x] = \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0 = \beta$$

Άρα $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Δ4

Έχουμε:

$$\begin{aligned} -1 \le \eta\mu\chi x \le 1 \iff \\ -1-2 \le \eta\mu\chi x - 2 \le 1-2 \iff \\ -3 \le \eta\mu\chi x - 2 \le -1 \quad , x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Αν $\eta\mu\chi x - 2 < -1 \iff \eta\mu\chi x < 1$
  $f(\eta\mu\chi x - 2) = e^{(\eta\mu\chi x - 2 + 1)} + \eta\mu x + 2 = e^{(\eta\mu\chi x - 1)} + \eta\mu x + 2$
  Οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} f(\eta\mu x - 2) \ge 2\eta\mu x - 2 \iff \\ e^{\eta\mu x - 1} + \eta\mu x + 2 \ge 2\eta\mu x - 2 \iff \\ e^{\eta\mu x - 1} - \eta\mu x + 4 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 4 - \eta\mu\chi \ge 0 \\ e^{\eta\mu\chi - 1} > 0 \end{aligned}\right\} \implies e^{\eta\mu\chi - 1} - \eta\mu\chi + 4 \ge 0 \quad \text{Ισχύει}$$

- Αν $\eta\mu\chi - 2 = 1$ τότε η ανίσωση γίνεται:

$$f(-1) \ge -1 \iff 0 >= 1 \quad \text{Ισχύει}$$