ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = \left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right) =$

$$= \left(f(x+h) - f(x)\right) + \left(g(x+h) - g(x)\right)$$

και για $h \neq 0$: $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$= f'(x) + g'(x)$

Άρα $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31)

Α2. **α)** Συχνότητα ν_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.
(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 65)

β) $\bar{x} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87)

Α3. **α)** **ΛΑΘΟΣ**
β) **ΛΑΘΟΣ**
γ) **ΣΩΣΤΟ**
δ) **ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3},\ x\in\mathbb{R}$$

Β1. $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'+\cancelto{0}{\left(\frac{1}{3}\right)'}=$

$$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-6x+5=x^2-6x+5$$

Β2. $f'(x)=x^2-6x+5$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16.$

$x_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}$ $\nearrow 5$, $\searrow 1$

Η $f'(x)=x^2-6x+5$ έχει 2 ρίζες, την $x_1=5$ και τη $x_2=1$.

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$, ενώ γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 5].

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0=5$, το $f(5)=\frac{1}{3}\cdot125-3\cdot25+5\cdot5+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=-\frac{24}{3}=-8.$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο $y=\lambda\cdot x+\beta$ όπου λ είναι η πρώτη παράγωγος στο $x_0=0$.

Άρα $f'(x_0)=f'(0)=5$

οπότε $y=5\,x+\beta$.

Το σημείο $\mathrm{A}\left(x_0,f(x_0)\right)$ θα επαληθεύσει την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα $\mathrm{A}\left(0,f(0)\right)=\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ και αντικαθιστώντας θα έχω $\frac{1}{3}=\beta$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}$.

Β4. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

Από ορισμό παραγώγου έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Για $x_0 = -1$ έχουμε: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) =$

$= (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

22, 18, 20 + *κ*, 14, 16 $\qquad$ *Cv* = 20%, $S = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$

Γ1. $x^2 + 6x - 7$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Άρα $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$

Οπότε $S = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+7)}{2\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+7)}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$

Γ2. $Cv = 20\%$

$\Rightarrow \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{20}{100}$

$\Rightarrow \frac{4}{|\bar{x}|} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow |\bar{x}| = 20$

$\Rightarrow \bar{x} = 20$

Γ3. $\overline{x} = 20$

$$\Rightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20$$

$$\Rightarrow 90+\kappa = 100$$

$$\Rightarrow \kappa = 10$$

Για τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

14, 16, 18, 22, 30

$\delta = x_3 = 18$ (Η μεσαία παρατήρηση σε περιττό πλήθος).

Γ4. Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\overline{y} = \overline{x} + \frac{10}{100}\overline{x}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = 1{,}1\overline{x}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = 1{,}1 \cdot 20$$

$\Rightarrow \overline{y} = 22$ και $Sy = 1{,}1 \cdot Sx$

$$\Rightarrow Sy = 1{,}1 \cdot 4$$

$$\Rightarrow Sy = 4{,}4$$

Άρα $Cv_y = \dfrac{Sy}{\overline{y}} = \dfrac{4{,}4}{22} = 0{,}2$ ή 20%.

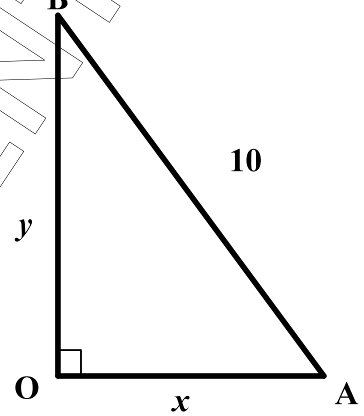
ΘΕΜΑ Δ

$\widehat{O} = 90°$

(ΟΑ) = x

(ΟΒ) = y

(ΑΒ) = 10



Δ1. Γνωρίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι:

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{OA})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$y = f(\mathrm{x}) = \sqrt{10^2 - x^2}$$

Για τη συνάρτηση f πρέπει να ισχύει:

$$10^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 100$$

$$|x| \leq 100 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$$

Επειδή x είναι πλευρά τριγώνου πρέπει $x > 0$.

Ακόμη, πρέπει $x \neq 10$, διότι αν $x = 10$ τότε $y = 0$ που είναι αδύνατο, διότι y εκφράζει μήκος πλευράς τριγώνου.

Άρα $A_f = (0, 10)$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = 8$ δίνεται από τον τύπο της πρώτης παραγώγου της $y = f(x)$ για $\mathrm{x}_0 = 8$.

Άρα

$$f'(\mathrm{x}_0) = f'(8)$$

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot \left(100 - x^2\right) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

άρα

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 64}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\lim_{x \to 6} \frac{f(\mathrm{x}) - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{-x^2 + 36}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} - \frac{\cancel{(x - 6)}\,(x + 6)}{\cancel{(x - 6)}\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

Δ4. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} < 0$, για κάθε $x \in (0,10)$

Ισχύει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10)$.

Άρα: $x_1 < x_3 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.