Ενδεικτικές Απαντήσεις Μαθηματικών Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΑΝΕΛΙΞΗ

09/09/2023

Θέμα Α

Α1

Θεωρία σελίδα 135 σχολικού βιβλίου.

Α2

Θεωρία σελίδα 162 σχολικού βιβλίου.

Α3

Θεωρία σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.

Α4

(α′) ΣΩΣΤΟ

(β′) ΛΑΘΟΣ

(γ′) ΣΩΣΤΟ

(δ′) ΛΑΘΟΣ

(ε′) ΣΩΣΤΟ

Θέμα Β

Β1

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$
$f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$
$f'(x) < 0$ για $x \in [0, 2]$
Άρα:

$f \uparrow (-\infty, 0]$
$f \downarrow [0, 2]$
$f \uparrow [2, +\infty]$
Στο $x = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $y = f(0) = 2$.
Στο $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστοτο $y = f(2) = -2$.

B2

$f''(x) = 6x - 6$:
$f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1$, άρα η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$
$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$
Η f έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$ δηλαδή $A(1, 0)$.

B3

$$\mathrm{I} = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \left[x^3\right]_1^2 + [2x]_1^2 = -\frac{5}{4}$$

B4

Έστω $g(x) = f(x) - e^x$, $x \in [0, 1]$
Η g είναι συνεχής στο [0,1].
$g(0) = f(0) - e^0 = 1$
$g(1) = f(1) - e = -e$
Άρα $g(0)g(1) < 0$
Ισχύει το Θεώρημα Bolzano και προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα Γ

Γ1

$D_f = x \in D_h$ και $h(x) \in D_g \leftrightarrow x \in (0, +\infty)$ και $lnx \in (0, +\infty) \leftrightarrow x > 0$ και $lnx > 0 \leftrightarrow x > 1$
Άρα $D_f = (1, +\infty)$,$f(x) = g(h(x)) = \dfrac{e^{lnx} + 1}{e^{lnx} - 1} = \dfrac{x + 1}{x - 1}, x > 1$

Γ2

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \dfrac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \ldots x_1 = x_2$.
Άρα f 1-1 στο $(1, +\infty)$
Έστω $f(x) = y \Rightarrow \dfrac{x + 1}{x - 1} = y \Rightarrow \ldots x = \dfrac{y + 1}{y - 1}, y \neq 1$.
Όμως $x > 1 \Rightarrow \dfrac{y + 1}{y - 1} > 1 \Rightarrow \ldots y > 1$
Άρα $f^-1(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}, x > 1$
Άρα $f^-1 = f$

Γ3

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

.
Άρα $x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

.
Άρα $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Γ4

Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$. Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της f είναι $(1, +\infty)$ δηλαδή $f(x) > 1$.

Όμως $-1 \le \sin(x) \le 1$, άρα η εξίσωση $f(x) = sinx$ είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$

Θέμα Δ

Δ1

i Έστω $g(x) = f(x) + x - 2$ με $x \in [1, 2]$:

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- $g(1) = -1$ και $g(2) = 2$, άρα $g(1)g(2) < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano άρα η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με την ευθεία (e_1).

ii Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x = 2$:
$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y = x$

Δ2

Επειδή $f"(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$ η $f' \downarrow [1, 2]$
Για κάθε $x \in [1, 2]$ έχουμε: $x < 2 \Rightarrow f'(x) > f'(2) \Rightarrow f'(x) > 1 > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2] άρα και 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της αντίστροφής είναι το σύνολο τιμών της f. Όμως η f είναι συνεχής και γνησιώς αύξουσα στο [1,2] άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(1), f(2)] = [0, 2]$.Άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το [0,2].

Δ3

Έστω $x \in (1, 2)$.
Για την f στα διαστήματα $[1, x], [x, 2]$ ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Οπότε υπάρχει $\xi_1 \in [1, x]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ και $\xi_2 \in [x, 2]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2) - f(x)}{2 - x}$.
Όμως $\xi_1 < \xi_2$ αφόυ η f' είναι γνησίως φθίνουσα τότε, $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x-1} > \dfrac{2 - f(x)}{2 - x} x \in (1, 2)$.

Ευχαριστούμε τους μαθηματικούς:
ΝΑΤΣΗ ΙΩΑΝΝΗ,ΚΟΥΦΑΚΗ ΜΙΧΑΛΗ

ΑΝΕΛΙΞΗ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ