ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.99

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.162

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 128-129

Α4.

α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Επομένως η συνάρτηση f:

- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [-1,1]
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=3$
- παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1)=-1$

B2.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ είναι της μορφής

(ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

Έχουμε $f(0)=1$ και $f'(0)=-3$

Δηλαδή: (ε): $y-1=-3(x-0) \Leftrightarrow y=-3x+1$

B3.

$$I=\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2 \frac{x^3-3x+1}{x}dx=\int_1^2\left(\frac{x^3}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^2-3+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x+\ln|x|\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-3\cdot 2+\ln 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot 1+\ln 1\right)=$$

$$\frac{8}{3}-6+\ln 2-\frac{1}{3}+3=\ln 2-\frac{2}{3}$$

B4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(x\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$

Αφού $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Άρα η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Γ2.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \ln x$$

Θέτω $\sigma(x) = \ln x \cdot (x-1) - x$ με $x \in [e, e^2]$

- σ συνεχής στο $[e, e^2]$ ως πράξεις συνεχών.
- $\sigma(e) = \ln e \cdot (e-1) - e = e - 1 - e = -1 < 0$

  $\sigma(e^2) = \ln e^2 \cdot (e^2 - 1) - e^2 = 2(e^2-1) - e^2 = 2e^2 - 2 - e^2 = e^2 - 2 > 0$

Οπότε $\sigma(e) \cdot \sigma(e^2) < 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $\sigma(x_0) = 0$. Δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in (e, e^2)$

Γ3.

$D_f = (1, +\infty)$ και $D_g = (0, +\infty)$

Πεδίο ορισμού:

$D_{gof} = \{x \in D_f \;/\; f(x) \in D_g\} \Leftrightarrow \{x \in (1, +\infty) \text{ και } f(x) \in (0, +\infty)\}$

$\Leftrightarrow \{x > 1 \text{ και } \frac{x}{x-1} > 0\} \Leftrightarrow \{x \cdot (x-1) > 0\} \Leftrightarrow \{x < 0 \text{ ή } x > 1\}$

Τελικά $D_{gof} = (1, +\infty)$

Τύπος:

$$\varphi(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \ln\frac{x}{x-1} = \ln x - \ln{(x-1)}$$

Γ4.

$$\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1), \qquad x > 1$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$

Άρα $D_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$h(x) = \ln(\frac{x}{x-1})$ με $D_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Επομένως οι συναρτήσεις είναι δεν ίσες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

$$g(x) \cdot x = f(x) - \eta\mu x \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot x + \eta\mu x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(g(x) \cdot x + \eta\mu x) = 0 + 0 = 0 = f(0)$$

Επιπρόσθετα,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x) - \eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0 + 1 = 1 = f'(0)$$

Δ2.

Ισχύει: $f'(x) \cdot f''(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left[\left(f'(x)\right)^2\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 = x^2 + c_1$$

Για x=0 έχουμε

$$(f'(0))^2 = 0^2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

Άρα $(f'(x))^2 = x^2 + 1$

Επειδή $x^2 + 1 \neq 0$ είναι και $f'(x) \neq 0$ και αφού $f'(x)$ συνεχής ως παραγωγίσιμη και επίσης $f'(0) = 1 > 0$ θα ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, $(f'(x))^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ \ x \in \mathbb{R}$

Δ3.

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$					

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

Η C_f εμφανίζει σημείο καμπής το $(0,0)$.

Δ4.

Έχουμε: $f'(x) = \sqrt{x^2+1} > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και ¨1-1¨.

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_fβρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Η f είναι κυρτή στο $[0+\infty)$, άρα η C_fβρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0+\infty)$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = \mathbb{R}$.