Θέμα Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 133 Εφαρμογές το ΘΜΤ

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 73 Ορισμός

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 128.

A4. α) Λ β) Σ γ)Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1 Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{1-\sqrt{x_1}} = \dfrac{1}{1-\sqrt{x_2}} \Rightarrow$

$1-\sqrt{x_1} = 1-\sqrt{x_2} \Rightarrow -\sqrt{x_1} = -\sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι «1-1» και αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν: $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow -\sqrt{x} = \dfrac{1}{y} - 1, \quad y < 0 \text{ ή } y > 1 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x} = \frac{y-1}{y}, \quad y < 0 \text{ ή } y \geq 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 \text{ με } y < 0 \text{ ή } y > 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 > 1$$

Λύνοντας τους περιορισμούς του y έχουμε:

$\left(\dfrac{y-1}{y}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \dfrac{(y-1)^2}{y^2} > 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 > y^2 \Leftrightarrow y < \dfrac{1}{2}$ και τελικά $y < 0$.

Οπότε η αντίστροφη της f είναι ή $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2, \quad x < 0$

B2. Θα πρέπει $x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow x < 0$ και $f^{-1} \in D_g \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0$ που ισχύει,

άρα $D_{g o f^{-1}} = D_h = (-\infty, 0)$ και ορίζεται η $g \text{ o } f^{-1}$ με

$$g \text{ o } f^{-1}(x) = g\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x} = h(x)$$

B3. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x} = \left(\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\right) = -1\cdot(-\infty) = +\infty$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=1

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow 1>\ln x\Leftrightarrow e>x$$

Επομένως για $0<x<e$, $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$,

για $x>e$, $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$,

και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (ολικό) για x=e το $f(e)=\frac{1}{e}$

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=\frac{(1-\ln x)'\,x^2-(1-\ln x)\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-3+2\ln x}{x^3}=0\Leftrightarrow -3+2\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{-3+2\ln x}{x^3}>0\Leftrightarrow -3+2\ln x>0\Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x>e\sqrt{e}$$

Επομένως

Για $0<x<e\sqrt{e}$, $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,e\sqrt{e}]$

Για $x>e\sqrt{e}$, $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[e\sqrt{e},+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=e\sqrt{e}$ το $\left(e\sqrt{e},\frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

Γ3 Αν $\Delta_1=(0,e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\ln x\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty \text{ τότε}$$

$$f(\Delta_1)=(\mathrm{A},f(e)]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$$

Αν $\Delta_2 = [e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2 και

$$B = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underline{\underline{DLH}} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{τότε} \quad f(\Delta_2) == \left(B, f(e)\right] = \left(0, \frac{1}{e}\right]$$

Επομένως $R_f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$

Γ4. Αν $\kappa \le 0$ τότε $\kappa \in f(\Delta_1)$ άρα ή εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση αφου η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 Αν $0 < \kappa < \frac{1}{e}$ τότε $\kappa \in f(\Delta_1)$ $\kappa\alpha\iota$ $\kappa \in f(\Delta_2)$ άρα ή εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο Δ_1 αφου η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και μοναδική λύση στο Δ_2 αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 άρα συνολικά εχει 2 λύσεις. Αν $\kappa = \frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση αφού για x=e η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο. Αν $\kappa > \frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφου $\kappa \notin R_f$

Θέμα Δ

Α1. Θεωρώ $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ή f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x$ Άρα η εφαπτόμενη (ε) της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f είναι (ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ αντικαθιστώντας έχουμε : $y - e^{x_0} = e^{x_0}x - x_0e^{x_0} \Leftrightarrow y = e^{x_0}x - x_0e^{x_0} + e^{x_0}$

Εφόσον το Μ ανήκει στην (ε) την επαληθεύει άρα $0 = -e^{x_0} - x_0e^{x_0} + e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$ μοναδική λύση. Άρα η γραφική παράσταση της f δέχεται μοναδική εφαπτόμενη που διέρχεται από το Μ και έχει εξίσωση $y = x + 1$

Δ2. Αρκεί να δείξω ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g που διέρχεται από το Μ είναι η $y = x + 1$.

Θεωρώ $\mathrm{B}(x_1, f(x_1))$ σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Ή g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -2x - 1$ Άρα η εφαπτόμενη (η) της γραφικής παράσταση της συνάρτησης g είναι (η): $y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1)$ αντικαθιστώντας έχουμε :

$$y + x_1^2 + x_1 = (-2x_1 - 1)x + 2x_1 + 1 \Leftrightarrow y = (-2x_1 - 1)x - x_1^2 + x_1 + 1$$

Εφόσον το Μ ανήκει στην (η) την επαληθεύει άρα

$0 = 2x_1 + 1 - x_1^2 + x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \quad \acute{\eta} \quad x_1 = -2$. Άρα η γραφική παράσταση της f δέχεται δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το Μ Για x=-1 έχουμε

(η) $y = x + 1$.Άρα η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Δ3. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\Re$ επομένως είναι κυρτή στο $\Re$ επομένως $f(x)\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει για x=0

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x)=-2<0$ για κάθε $x\in\Re$ επομένως είναι κοίλη στο $\Re$ επομένως $g(x)\leq x+1$ και η ισότητα ισχύει για x=-1

Επομένως $f(x)>x+1>g(x)$ αφού οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικά x. Τελικά $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\Re$.